લિબર્ટી પેપરસેટ

ધોરણ 12 : ગણિત

Full Solution

સમય : 3 કલાક **અસાઈનમેન્ટ પ્રશ્નપત્ર 4**

PART A

1. (B) **2.** (C) **3.** (D) **4.** (C) **5.** (D) **6.** (C) **7.** (C) **8.** (A) **9.** (D) **10.** (A) **11.** (D) **12.** (C) **13.** (B) **14.** (B) **15.** (A) **16.** (C) **17.** (B) **18.** (C) **19.** (D) **20.** (B) **21.** (B) **22.** (B) **23.** (B) **24.** (D) **25.** (B) **26.** (C) **27.** (B) **28.** (C) **29.** (C) **30.** (C) **31.** (C) **32.** (A) **33.** (D) **34.** (A) **35.** (C) **36.** (B) **37.** (D) **38.** (B) **39.** (B) **40.** (B) **41.** (A) **42.** (C) **43.** (C) **44.** (B) **45.** (A) **46.** (D) **47.** (B) **48.** (A) **49.** (D) **50.** (B)

PART B

વિભાગ-A

1.

અહીં, $sin^{-1}\dfrac{3}{5} = \alpha$ અને $tan^{-1}\dfrac{17}{31} = \beta$ લેતાં,

$\therefore \ sin\ \alpha = \dfrac{3}{5}$ અને $tan\ \beta = \dfrac{17}{31}$

$$tan\ \alpha = \frac{3}{5}$$

$$tan\ 2\alpha = \frac{2\ tan\ \alpha}{1 - tan^2\alpha}$$

$$= \frac{2\left(\frac{3}{4}\right)}{1 - \frac{9}{16}}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}}$$

$$= \frac{24}{7}$$

$$tan\ (2\alpha - \beta) = \frac{tan\ 2\alpha - tan\ \beta}{1 + tan\ 2\alpha\ tan\ \beta}$$

$$= \frac{\frac{24}{7} - \frac{17}{31}}{1 + \frac{24}{7} \times \frac{17}{31}}$$

$$= \frac{\frac{744 - 119}{217}}{\frac{217 + 408}{217}}$$

$$= \frac{605}{605}$$

$$tan\ (2\alpha - \beta) = 1$$

$$\therefore \ tan\ (2\alpha - \beta) = tan\ \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \ 2\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \ 2\ sin^{-1}\frac{3}{5} - tan^{-1}\frac{17}{31} = \frac{\pi}{4}$$

2.

$$tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}\right)$$

$x = tan\theta$ ધારો,

$\theta = tan^{-1}\ x,\ \theta \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$= tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 + tan^2\theta} - 1}{tan\ \theta}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{sec^2\theta - 1}}{tan\ \theta}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{|sec\ \theta| - 1}{tan\ \theta}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{sec\ \theta - 1}{tan\ \theta}\right) \quad \left(\because -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow sec\theta > 0\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{cos\ \theta} - 1}{\frac{sin\ \theta}{cos\ \theta}}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{1 - cos\ \theta}{sin\ \theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{\theta}{2} \qquad \left(\because \ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \tan^{-1} x$$

3.

➪ બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$2\sin x \cdot \cos x + 2\cos y\,(-\sin y)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \sin 2x - \sin 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}(\sin 2y) = \sin 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2x}{\sin 2y}$$

4.

➪ $$I = \int\sqrt{1-4x^2}\,dx$$

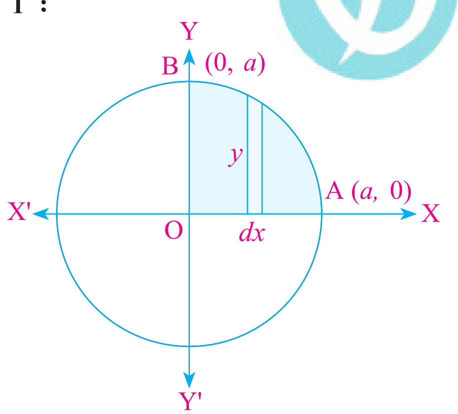
$$= \int\sqrt{(1)^2-(2x)^2}$$

$$= \frac{2x}{2\times 2}\sqrt{1-4x^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin^{-1}(2x)}{2} + c$$

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{1-4x^2} + \frac{\sin^{-1}(2x)}{4} + c$$

5.

➪ **રીત 1 :**



આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આપેલ વર્તુળ દ્વારા આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ = 4 × (આપેલ વક્ર રેખા $x = 0$, $x = a$ અને X-અક્ષ દ્વારા આવૃત્ત પ્રદેશ AOBAનું ક્ષેત્રફળ).

(વર્તુળ એ X-અક્ષ અને Y-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત છે.)

માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= 4\int_0^a y\,dx$ (શિરોલંબ પટ્ટીઓ લેતાં)

$$= 4\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

હવે, $x^2 + y^2 = a^2$ પરથી $y = \pm\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ મળશે. અહીં પ્રદેશ AOBA પ્રથમ ચરણમાં આવેલો છે. તેથી $y = \sqrt{a^2-x^2}$ લઈશું. આપણને વર્તુળ દ્વારા આવૃત્ત સમગ્ર પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ સંકલન કરતાં મળશે.

માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$

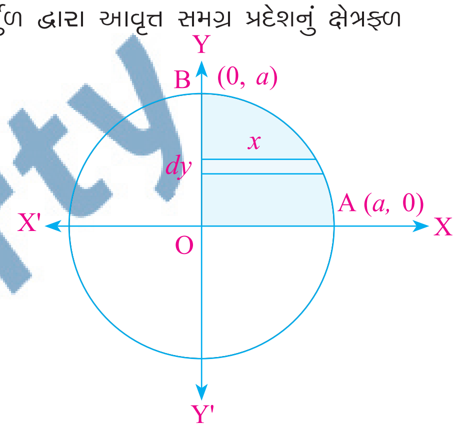
$$= 4\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$

$$= 4\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$= \pi a^2$ ચો. એકમ

➪ **રીત 2 :**

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સમક્ષિતિજ પટ્ટીઓ લેતાં, આપેલ વર્તુળ દ્વારા આવૃત્ત સમગ્ર પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ



$$= 4\int_0^a x\,dy$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{a^2-y^2}\,dy$$

$$= 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{a^2-y^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{a}\right]_0^a$$

$$= 4\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$

$$= 4\,\frac{a^2}{2}\,\frac{\pi}{2}$$

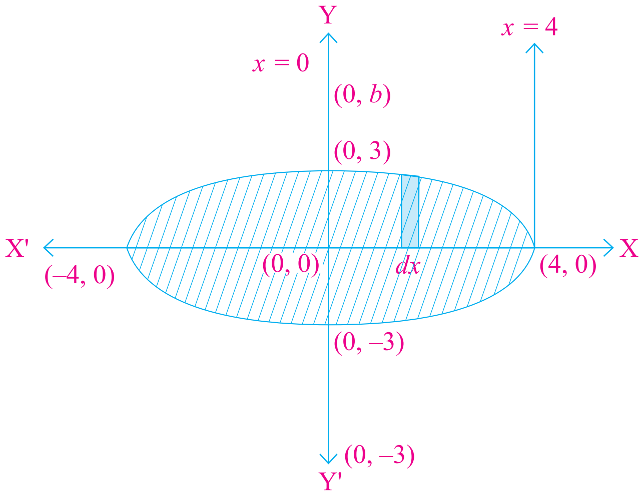
$= \pi a^2$ ચો. એકમ

6.

➪ $$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$a^2 = 16$, $a = 4$ $(a > b)$

$b^2 = 9$, $b = 3$



આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ :

A = 4 × પ્રથમ પ્રદેશ

વડે આવૃત્ત ક્ષેત્રફળ

$\therefore$ A = 4|I|

$$I = \int_0^4 y\ dx$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\therefore\ y^2 = 9\left(1 - \frac{x^2}{16}\right)$$

$$\therefore\ y^2 = \frac{9}{16}\ (16 - x^2)$$

$$\therefore\ y^2 = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$$

$$I = \int_0^4 \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}\ dx$$

$$I = \frac{3}{4}\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\ dx$$

$$I = \frac{3}{4}\left[\frac{x}{2}\sqrt{16 - x^2} + \frac{16}{2}\ sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)\right]_0^4$$

$$I = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{4}{2}(0) + 8\ sin^{-1}(1)\right) - \left(0 + sin^{-1}(0)\right)\right]$$

$$I = \frac{3}{4}\left(8 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I = 3\pi$$

હવે, A $= 4|I|$

$= 4|3\pi|$

$\therefore$ A $= 12\pi$ ચોરસ એકમ

7.

$(1 + e^{2x})\ dy + (1 + y^2)\ e^x\ dx = 0$

$\therefore\ (1 + e^{2x})\ dy = -(1 + y^2)\ e^x\ dx$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{-(1 + y^2)\ e^x}{(1 + e^{2x})}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{(1 + y^2)} = \frac{-dx\ e^x}{1 + e^{2x}}$$

$\rightarrow$ બંને બાજુ સંકલન લેતાં,

$$\therefore\ \int \frac{dy}{y^2 + 1} = -\int \frac{e^x\ dx}{(e^x)^2 + 1}$$

$e^x = t$ આદેશ લેતાં,

$\therefore\ e^x\ dx = dt$

$$\therefore\ \int \frac{dy}{y^2 + 1} = -\int \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$\therefore\ tan^{-1}(y) = -tan^{-1}(t) + c$

$\therefore\ tan^{-1}(y) = -tan^{-1}(e^x) + c$

$\therefore\ tan^{-1}(y) + tan^{-1}(e^x) = c$ ... (1)

$\rightarrow$ જો $x = 0$ અને $y = 1$ ત્યારે,

$\therefore\ tan^{-1}(1) + tan^{-1}(e^0) = c$

$\therefore\ tan^{-1}(1) + tan^{-1}(1) = c$

$\therefore\ 2\ tan^{-1}(1) = c$

$\therefore\ 2 \cdot \frac{\pi}{4} = c$

$\therefore\ c = \frac{\pi}{2}$

$\rightarrow$ c ની કિંમત પરિણામ (1) માં મૂકતાં,

$\therefore\ tan^{-1}(y) + tan^{-1}(e^x) = \frac{\pi}{2}$;

જે આપેલ વિકલ સમીકરણનો વિશિષ્ટ ઉકેલ છે.

8.

$\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ના પરિણામી સદિશ,

$\vec{a} + \vec{b} = 3\hat{i} + \hat{j}$

$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{9 + 1}$

$= \sqrt{10}$

$\vec{a} + \vec{b}$ ની દિશામાં 5 માનવાળો સમાંતર સદિશ

$$= \frac{5(\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}|}$$

$$= \frac{5(3\hat{i} + \hat{j})}{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{15}{\sqrt{10}}\hat{i} + \frac{5}{\sqrt{10}}\hat{j}$$

$$= \frac{(5 \times 3)\sqrt{10}}{10}\ \hat{i} + \frac{5\sqrt{10}}{10}\ \hat{j}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{10}\ \hat{i} + \frac{1}{2}\sqrt{10}\ \hat{j}$$

9.

L_1ની દિક્કોસાઇન $= \frac{12}{13}\hat{i} - \frac{3}{13}\hat{j} - \frac{4}{13}\hat{k}$

L_2ની દિક્કોસાઇન $= \frac{4}{13}\hat{i} + \frac{12}{13}\hat{j} + \frac{3}{13}\hat{k}$

L_3ની દિક્કોસાઇન $= \frac{3}{13}\hat{i} - \frac{4}{13}\hat{j} + \frac{12}{13}\hat{k}$

L_1 એ $\overrightarrow{b_1} = 12\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}$ ને સમાંતર છે.

L_2 એ $\overrightarrow{b_2} = 4\hat{i} + 12\hat{j} + 3\hat{k}$ ને સમાંતર છે.

L_3 એ $\overrightarrow{b_3} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}$ ને સમાંતર છે.

હવે, $\overrightarrow{b_1} \cdot \overrightarrow{b_2}$

$= (12\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}) \cdot (4\hat{i} + 12\hat{j} + 3\hat{k})$
$= 48 - 36 - 12$
$= 0$

$\overrightarrow{b_2} \cdot \overrightarrow{b_3}$

$= (4\hat{i} + 12\hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k})$
$= 12 - 48 + 36$
$= 0$

$\overrightarrow{b_3} \cdot \overrightarrow{b_1}$

$= (3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}) \cdot (12\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k})$
$= 36 + 12 - 48$
$= 0$

$\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$ પરસ્પર લંબ સદિશો છે.

$\therefore$ L_1, L_2, L_3 પરસ્પર લંબ રેખાઓ છે.

10.

➪ પ્રથમ રેખાના દિક્ગુણોત્તર 3, 5, 4 અને બીજી રેખાના દિક્ગુણોત્તર 1, 1, 2 છે. જો તેમની વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય, તો

$$\cos\theta = \left| \frac{3\cdot1 + 5\cdot1 + 4\cdot2}{\sqrt{3^2+5^2+4^2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}} \right|$$

$$= \frac{16}{\sqrt{50}\sqrt{6}}$$

$$= \frac{16}{5\sqrt{2}\sqrt{6}}$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{15}$$

આથી, માંગેલો ખૂણો $\cos^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{15}\right)$ છે.

11.

➪ સમતોલ સિક્કો અને સમતોલ પાસાને ઉછાળતાં,

S = {(H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (H, 5), (H, 6),
(T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6)}

$n = 12$

ઘટના A : સિક્કા પર છાપ મળે.

A = {(H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (H, 5), (H, 6)}

$\therefore r = 6$

$\therefore P(A) = \frac{r}{n}$

$= \frac{6}{12}$

$= \frac{1}{2}$

ઘટના B : પાસા પર 3 મળે.

B = {(H, 3), (T, 3)}

$\therefore r = 2$

$\therefore P(B) = \frac{r}{n}$

$= \frac{2}{12}$

$= \frac{1}{6}$

$\therefore A \cap B = \{(H, 3)\}$

$\therefore r = 1$

$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{12}$ .... (i)

$\therefore P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$

$= \frac{1}{12}$ .... (ii)

પરિણામ (i) & (ii) પરથી,

$\therefore$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ થવાથી નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

12.

➪ $P(A) = \frac{1}{4}$ $P(B) = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

P(A - નહિ અને B - નહિ)

$= P(A' \cap B')$
$= P(A \cup B)'$
$= 1 - P(A \cup B)$
$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$
$= 1 - \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right]$
$= \frac{3}{8}$

વિભાગ-B

13.

➪ અહીં $S = \{(a, b) : a \le b^2\}$

ધારો કે, $(a, a) \in S$, $\forall a \in R$

$\therefore$ $a \le a^2$ જે શક્ય નથી.

$\therefore$ ધારણા ખોટી છે.

$\therefore$ $(a, a) \notin S$

$\therefore$ S એ સ્વવાચક નથી.

ઉદાહરણ : $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ માટે $\frac{1}{3} \le \frac{1}{9}$ જે શક્ય નથી.

$\therefore$ $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \notin S$

ધારો કે, $(2, 5) \in S$ પરંતુ $(5, 2) \notin S$

$\therefore$ (5, 2) માટે $5 \le 4$ જે શક્ય નથી.

$\therefore$ S એ સંમિત નથી.

ધારો કે, $(a, b) \in S$ તથા $(b, c) \in S$

$\therefore \quad a \le b^2$ તથા $b \le c^2$

$\therefore \quad b^2 \le c^4$

$\therefore \quad a \le b^2 \le c^4$

$\therefore \quad a \le c^4$

$\therefore \quad (a, c) \notin S$

$\therefore$ S એ પરંપરિત નથી.

આમ, સંબંધ S એ સ્વવાચક નથી, સંમિત નથી, પરંપરિત નથી.

14.

10 ડઝન = $10 \times 12 = 120$ નંગ

8 ડઝન = $8 \times 12 = 96$ નંગ

$\therefore$ રસાયણવિજ્ઞાનનાં પુસ્તકોની સંખ્યા = 120 નંગ

ભૌતિકવિજ્ઞાનનાં પુસ્તકોની સંખ્યા = 96 નંગ

અર્થશાસ્ત્રના પુસ્તકોની સંખ્યા = 120 નંગ

રસાયણવિજ્ઞાનનાં પુસ્તકની વેચાણ કિંમત ₹ 80

ભૌતિકવિજ્ઞાનનાં પુસ્તકની વેચાણ કિંમત ₹ 60

અર્થશાસ્ત્રના પુસ્તકની વેચાણ કિંમત ₹ 40

$\therefore$ કુલ વેચાણ કિંમત

$$= \begin{bmatrix} 120 & 96 & 120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 \\ 60 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$= [120 \times 80 + 96 \times 60 + 120 \times 40]$$
$$= [9600 + 5760 + 4800]$$

$\therefore$ કુલ વેચાણ કિંમત = [20160]

ભંડારને મળેલ કુલ રકમ ₹ 20,160 હોય.

15.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+2 & 6+2 \\ 3+1 & 2+1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^2 = \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + aA + bI = O$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3a & 2a \\ a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 11+3a+b & 8+2a \\ 4+a & 3+a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$11 + 3a + b = 0$ .... (1)

$8 + 2a = 0$

$a + 4 = 0$

$\therefore \quad a = -4$

$a = -4$ એ પરિણામ (1)માં મૂકતાં,

$\therefore \quad 11 + 3(-4) + b = 0$

$\therefore \quad 11 - 12 + b = 0$

$\therefore \quad b = 1$

આમ, $a = -4$, $b = 1$

16.

$$y = x^{x^2-3} + (x-3)^{x^2}$$

ધારો કે, $u = x^{(x^2-3)}$

$v = (x-3)^{x^2}$

$\therefore y = u + v$

હવે, બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \qquad ...... (1)$$

અહીં, $u = x^{(x^2-3)}$ ની

બંને બાજુ log લેતાં,

$log u = (x^2 - 3)\, log x$

હવે, બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = (x^2-3)\frac{1}{x} + log x \,.\, (2x)$$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = u\left[\frac{x^2-3}{x} + 2x \cdot log x\right]$$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = x^{(x^2-3)}\left(\frac{x^2-3}{x} + 2x \cdot log\, x\right) \qquad ...... (2)$$

વળી, $v = (x-3)^{x^2}$ ની

બંને બાજુ log લેતાં,

$log v = x^2\, log(x-3)$

હવે, બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \frac{x^2}{(x-3)}(1) + log(x-3) \cdot (2x)$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dx} = v\left[\frac{x^2}{x-3} + 2x \cdot log(x-3)\right]$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dx} = (x-3)^{x^2}\left(\frac{x^2}{x-3} + 2x \cdot log(x-3)\right) \qquad ...... (3)$$

પરિણામ (1) માં પરિણામ (2) અને (3) ની કિંમત મૂકતાં,

$$\frac{dy}{dx} = x^{(x^2-3)}\left(\frac{x^2-3}{x} + 2x\, log x\right) + (x-3)^{x^2}\left(\frac{x^2}{x-3} + 2x\, log(x-3)\right)$$

17.

અહીં, $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$

$\therefore \quad f'(x) = 6x^2 - 12x + 6$

$= 6(x-1)^2$

$\therefore x = 1$ આગળ $f'(x) = 0$

આથી, માત્ર $x = 1$ એ જ વિધેય f ની નિર્ણાયક સંખ્યા છે.

હવે, આપણે આ સંખ્યા માટે વિધેય f ના સ્થાનીય મહત્તમ અને/અથવા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો માટે તપાસ કરીએ.

નોંધો કે, પ્રત્યેક $x \in R$ માટે,

$f'(x) \geq 0$ અને વિશેષમાં,

જેમ $x \to 1_-$ તથા $x \to 1_+$ તેમ $f'(x) > 0$.

આથી, પ્રથમ વિકલિત કસોટી પરથી,

વિધેયને $x = 1$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય નથી.

આથી $x = 1$ એ નતિબિંદુ છે.

18.

$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{c} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$

$= 2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} - 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k} + 3\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k}$

$= 3\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ ને સમાંતર સદિશ,

$$= \frac{2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}}{|2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}|}$$

$$= \frac{3\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{9+9+4}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{22}}\hat{i} - \frac{3}{\sqrt{22}}\hat{j} + \frac{2}{\sqrt{22}}\hat{k}$$

19.

બે રેખાઓ સમાંતર છે.

આપણી પાસે $\vec{a_1} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$,

$\vec{a_2} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ અને

$\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ છે.

આથી, રેખાઓ વચ્ચેનું અંતર

$$d = \left| \frac{\vec{b} \times (\vec{a_2} - \vec{a_1})}{|\vec{b}|} \right|$$

$$= \left| \frac{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\sqrt{4+9+36}} \right|$$

$$= \frac{|-9\hat{i} + 14\hat{j} - 4\hat{k}|}{\sqrt{49}}$$

$$= \frac{\sqrt{293}}{\sqrt{49}}$$

$$= \frac{\sqrt{293}}{7} \text{ એકમ}$$

20.

$x + 2y \leq 10$

$3x + y \leq 15$

હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 3x + 2y$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$x + 2y = 10$ ... (i)

x	0	10
y	5	0

$3x + y = 15$ ... (ii)

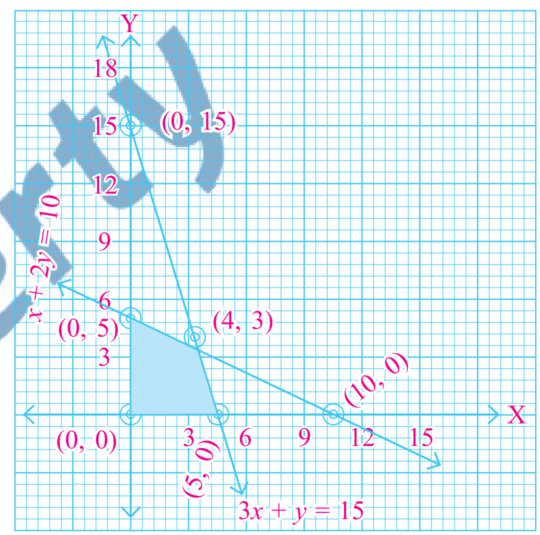
x	0	5
y	15	0

(i) અને (ii)નો ઉકેલ,

$$\begin{array}{r} x + 2y = 10 \\ 6x + 2y = 30 \\ - \quad - \quad - \\ \hline -5x = -20 \end{array}$$

$\therefore x = 4$ અને $y = 3$

આથી, (4, 3) અને (0, 0) મળે.



આકૃતિમાં આપેલ અસમતાઓનો આલેખ દર્શાવ્યો છે શક્ય ઉકેલ પ્રદેશ એ સિમિત છે. તથા શક્ય ઉકેલપ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ (0, 0), (5, 0) અને (4, 3) મળે.

શક્ય ઉકેલ પ્રદેશના શિરોબિંદુ	$Z = 3x + 2y$
(0, 5)	10
(5, 0)	15
(4, 3)	18 ← મહત્તમ
(0, 0)	0

આમ, બિંદુ (4, 3) આગળ મહત્તમ મૂલ્ય 18 મળે.

21.

આપણે ડોક્ટર દર્દીની મુલાકાત લેવામાં મોડા પડે છે તે ઘટનાને E વડે તેમજ ડોક્ટર ટ્રેન, બસ, સ્કૂટર અથવા અન્ય પરિવહન દ્વારા આવે છે તે ઘટનાઓને અનુક્રમે T_1, T_2, T_3, T_4 વડે દર્શાવીએ.

અહીં, $P(T_1) = \frac{3}{10}$, $P(T_2) = \frac{1}{5}$, $P(T_3) = \frac{1}{10}$

અને $P(T_4) = \frac{2}{5}$ (આપેલ છે.)

ડોક્ટર ટ્રેન દ્વારા આવતાં મોડા પહોંચે છે,

તે ઘટનાની સંભાવના $P(E \mid T_1) = \frac{1}{4}$

આ જ પ્રમાણે,

$P(E \mid T_2) = \frac{1}{3}$, $P(E \mid T_3) = \frac{1}{12}$, $P(E \mid T_4) = 0$

કારણ કે જો તે અન્ય કોઈ પરિવહન દ્વારા આવે તો તે મોડા પડતા નથી.

બેયૃઝના પ્રમેય દ્વારા, $P(T_1 \mid E)$

= જો ડોક્ટર મોડા પડ્યા હોય, તો તે ટ્રેન દ્વારા આવ્યા હોય તેની સંભાવના

$$= \frac{P(T_1)\cdot P(E\mid T_1)}{P(T_1)P(E\mid T_1)+P(T_2)P(E\mid T_2)+P(T_3)P(E\mid T_3)+P(T_4)P(E\mid T_4)}$$

$$= \frac{\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}}{\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{12}+\frac{2}{5}\times 0}$$

$$= \frac{3}{40}\times\frac{120}{18}=\frac{1}{2}$$

તેથી, માંગેલ સંભાવના $\frac{1}{2}$ છે.

વિભાગ-C

22.

(a) વસ્તુઓ x, y અને z ની એક નંગદીઠ વેચાણ કિંમત અનુક્રમે ₹ 2.50, ₹ 1.50 અને ₹ 1.00 છે.

∴ બજાર I માંથી થતી વેચાણ કિંમતને શ્રેણિક સ્વરૂપે નીચે મુજબ લખાય.

$$[10000 \quad 2000 \quad 18000]\begin{bmatrix}2.50\\1.50\\1.00\end{bmatrix}$$

$= [10000 \times 2.50 + 2000 \times 1.50 + 18000 \times 1]$

$= [25000 + 3000 + 18000]$

$= [46000]$

∴ બજાર II માંથી થતી વેચાણ કિંમતને શ્રેણિક સ્વરૂપે નીચે મુજબ લખાય.

$$[6000 \quad 20000 \quad 8000]\begin{bmatrix}2.50\\1.50\\1.00\end{bmatrix}$$

$= [6000 \times 2.50 + 20000 \times 1.50 + 8000 \times 1.00]$

$= [15000 + 30000 + 8000 = 53000]$

આમ, બજાર I માંથી થતી વેચાણ કિંમત ₹ 46,000 તથા બજાર II માંથી થતી વેચાણ કિંમત ₹ 53,000

(b) ઉપરની ત્રણેય વસ્તુઓ x, y અને z નો ઉત્પાદન ખર્ચ ₹ 2.00, ₹ 1.00 અને ₹ 0.50 છે.

∴ બજાર I ની વસ્તુઓનો ઉત્પાદન ખર્ચ શ્રેણિક સ્વરૂપે નીચે મુજબ લખાય.

$$[10000 \quad 2000 \quad 18000]\begin{bmatrix}2\\1\\0.50\end{bmatrix}$$

$= [10000 \times 2 + 2000 \times 1 + 18000 \times 0.50]$

$= [20000 + 2000 + 9000] = [31000]$

∴ બજાર Iની વસ્તુઓનો ઉત્પાદન ખર્ચ ₹ 31,000 છે.

∴ બજાર Iમાંથી થતો નફો

= વેચાણ કિંમત − ઉત્પાદન ખર્ચ

= 46000 − 31000 = ₹ 15,000

∴ બજાર IIની વસ્તુઓનો ઉત્પાદન ખર્ચ શ્રેણિક સ્વરૂપે નીચે મુજબ લખાય.

$$[6000 \quad 20000 \quad 8000]\begin{bmatrix}2\\1\\0.50\end{bmatrix}$$

$= [6000 \times 2 + 20000 \times 1 + 8000 \times 0.50]$

$= [12000 + 20000 + 4000]$

$= [36000]$

બજાર IIની વસ્તુઓનો ઉત્પાદન ખર્ચ ₹ 36,000

∴ બજાર IIમાંથી થતો નફો

= વેચાણ કિંમત − ઉત્પાદન ખર્ચ

= 53000 − 36000 = ₹ 17,000

23.

શ્રેણિક સ્વરૂપે લખતાં,

$$\therefore \begin{bmatrix}2&3&3\\1&-2&1\\3&-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-4\\3\end{bmatrix}$$

∴ AX = B

જ્યાં, $A=\begin{bmatrix}2&3&3\\1&-2&1\\3&-1&-2\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5\\-4\\3\end{bmatrix}$

AX = B

∴ $X = A^{-1}B$

A^{-1} શોધવા માટે,

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4 + 1) - 3(-2 - 3) + 3(-1 + 6)$$

$$= 2(5) - 3(-5) + 3(5)$$

$$= 10 + 15 + 15$$

$$= 40 \neq 0$$

$\therefore$ અનન્ય ઉકેલ મળે.

adj A મેળવવા માટે,

2 નો સહઅવયવ $A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1(4 + 1) = 5$

3નો સહઅવયવ $A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-2 - 3) = 5$

3 નો સહઅવયવ $A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1 + 6) = 5$

1 નો સહઅવયવ $A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-6 + 3) = 3$

–2 નો સહઅવયવ $A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1(-4 - 9) = -13$

1 નો સહઅવયવ $A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-2 - 9) = 11$

3 નો સહઅવયવ $A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1(3 + 6) = 9$

–1 નો સહઅવયવ $A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(2 - 3) = 1$

–2 નો સહઅવયવ $A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1(-4 - 3) = -7$

$$adj\ A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, adj\ A = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}B$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 25 - 12 + 27 \\ 25 + 52 + 3 \\ 25 - 44 - 21 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 40 \\ 80 \\ -40 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ઉકેલ : $x = 1, y = 2, z = -1$

24.

$y = \cos^{-1}x$

$\therefore x = \cos y$

હવે, બંને બાજુ y પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sin y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec} y \qquad \text{........ (1)}$$

હવે, બંને બાજુ x પ્રત્યે પુનઃ વિકલન કરતાં,

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -[-\operatorname{cosec} y \cdot \cot y]\frac{dy}{dx}$$

$$= \operatorname{cosec} y \cdot \cot y\ [-\operatorname{cosec} y] \quad (\because (1) \text{ પરથી})$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -\operatorname{cosec}^2 y \cdot \cot y$$

25.

ધારો કે, શંકુના આધારની ત્રિજ્યા r, ઊંચાઈ h તથા અર્ધશિરઃકોણ α છે. આ માહિતી આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે.

$\therefore \tan\alpha = \frac{r}{h}$

આથી, $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{r}{h}\right)$

$= \tan^{-1}(0.5)$ (આપેલ છે.)

અથવા $\frac{r}{h} = 0.5$

$\therefore r = \frac{h}{2}$

ધારો કે, શંકુનું ઘનફળ V છે.

$\therefore\ V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h$

$= \frac{\pi h^3}{12}$

આથી, $\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dh}\left(\frac{\pi h^3}{12}\right)\cdot\frac{dh}{dt}$ (સાંકળના નિયમ પરથી)

$= \frac{\pi}{4}h^2\cdot\frac{dh}{dt}$

હવે ઘનફળમાં થતા ફેરફારનો દર

$= \frac{dV}{dt} = 5$ મી^{3}/કલાક અને $h = 4$ મીટર

આથી, $5 = \frac{\pi}{4}(4)^2\cdot\frac{dh}{dt}$

અથવા $\frac{dh}{dt} = \frac{5}{4\pi} = \frac{35}{88}$ મીટર/કલાક

આથી, પાણીની સપાટીની ઊંચાઈ વધવાનો દર

$\frac{35}{88}$ મીટર/કલાક છે.

26.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\ log\ sin\ x - log\ sin\ 2x)\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (log\ sin^2 x - log\ sin\ 2x)\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} log\left(\frac{sin^2 x}{sin\ 2x}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} log\left(\frac{sin^2 x}{2\ sin\ x\cdot cos\ x}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} log\left(\frac{tan\ x}{2}\right) dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (log\ (tan\ x) - log\ 2)\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} log\ (tan\ x)\ dx - log\ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ dx$$

$$I = I_1 - log\ 2\ (x)_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I = I_1 - \frac{\pi}{2}\ log\ 2 \qquad \text{... (1)}$$

હવે, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} log(tan\ x)\ dx$

ગુણધર્મ (6) મુજબ,

$x = \frac{\pi}{2} - x$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(log\ tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (log\ cot\ x)\ dx$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} log\ (tan\ x)\ dx$$

$I_1 = -I_1$

$\therefore\ 2I_1 = 0$

$\therefore\ I_1 = 0$

પરિણામ (1) માં I_1 ની કિંમત મૂકતાં,

$I = \frac{-\pi}{2}\ log\ 2$ અથવા $\frac{\pi}{2}\ log\ \frac{1}{2}$

27.

$$y(e)^{\frac{x}{y}}\ dx = \left(x(e)^{\frac{x}{y}} + y^2\right) dy$$

$$\therefore\ \frac{dx}{dy} = \frac{x(e)^{\frac{x}{y}} + y^2}{y(e)^{\frac{x}{y}}}$$

$$\therefore\ \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{(e)^{\frac{x}{y}}} \qquad \text{... (1)}$$

હવે, $\frac{x}{y} = v$ આદેશ લેતાં,

$\therefore\ x = vy$

→ y પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\therefore\ \frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$

→ આ કિંમતો પરિણામ (1) માં મૂકતાં,

$v + y\frac{dv}{dy} = v + \frac{y}{e^v}$

$\therefore\ y\frac{dv}{dy} = \frac{y}{e^v}$

$\therefore\ e^v\ dv = dy$

$\therefore\ \int e^v\ dv = \int 1\ dy$

$\therefore\ e^v = y + c$

$\therefore\ (e)^{\frac{x}{y}} = y + c$

જે આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.